

Την επόμενη Πέμπτη ΟΧΙ
 → Πέμπτη 11/6 Μάθημα 6-9.

M/G/1/∞

Ανάλυση του χρόνου αναμονής.

Έστω W η ζ.μ που παριστάνει το χρόνο αναμονής του τυχαίου πελάτη σε σταθ. Ισορροπία.

Δυνατές τιμές $(0, +\infty)$

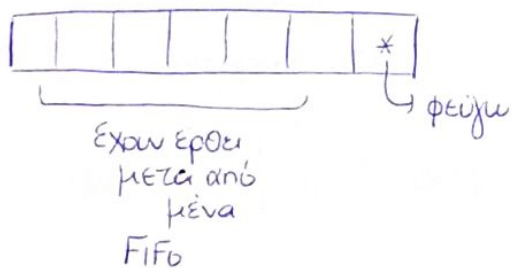
Έστω $W(t)$ η άσκ
 $w(t)$ η σπη.

Στο σύστημα η πειθαρχία είναι $F_c F_s (F_i F_o)$

Όταν ο τυχαίος πελάτης τελειώνει την εξυπηρέτηση και φεύγει
 έχουμε ότι η πιθανότητα να αφήσει n πελάτες στο σύστημα

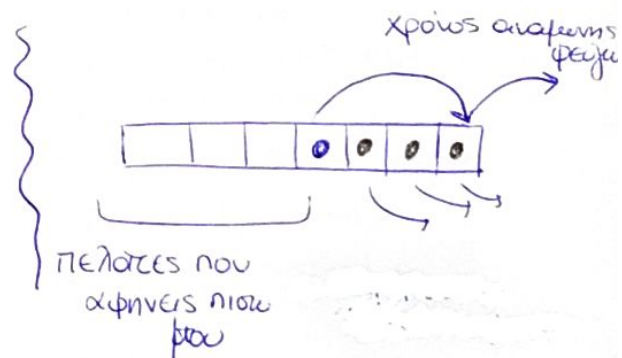
$$P(\text{να αφήσει } n \text{ πελάτες στο σύστημα}) = \prod_n$$

Πως συνδιάζεται αυτό με το χρόνο αναμονής;



όσοι ήρθαν κατά τη
 διάρκεια του χρόνου
 αναμονής.

1-Εξυπηρέτησις



$$\prod_n = P(\text{να αφήσει } n \text{ πελάτες στο σύστημα}) = P(\text{να έχω } n \text{-αφίξεις πελατών κατά τη διάρκεια αναμονής του τυχαίου πελάτη})$$

$$\Rightarrow \prod_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} w(t) dt$$

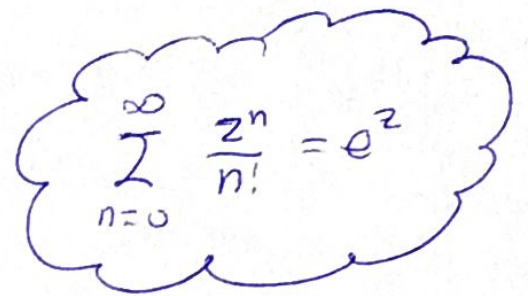
↙ n -αφίξεις

Θεωρώ $\Pi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pi_n x^n$, $|x| < 1$ (η πιθανογενήφια)

Επομένως

$$\Pi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!} w(t) dt$$

$$\Pi(x) = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} w(t) dt$$


$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$\Pi(x) = \int_0^{+\infty} e^{\lambda x t} e^{-\lambda t} w(t) dt$$

$$\Pi(x) = \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda - \lambda x)t} w(t) dt$$

Άρα $\Pi(x) = W^*(\lambda - \lambda x)$ όπου w^* ο Laplace της $w(t)$

Όμως είχαμε δει ότι:

$$\Pi(x) = \frac{(1-p)(1-x)b^*(\lambda - \lambda x)}{b^*(\lambda - \lambda x) - x}$$

$$\text{Άρα } w^*(\lambda - \lambda x) = \frac{(1-p)(1-x)b^*(\lambda - \lambda x)}{b^*(\lambda - \lambda x) - x}$$

Θέτουμε $\lambda - \lambda x = z$ και ύστερα από λίγη αλγεβρα

$$W^*(z) = \frac{(1-p)z b^*(z)}{\lambda b^*(z) + z - \lambda} \quad \left(= \frac{(1-p) \frac{z}{\lambda} b^*(z)}{b^*(z) - (1-z/\lambda)} \right)$$

$$\begin{aligned} \bullet \lambda - \lambda x &= z \\ \Rightarrow \lambda(1-x) &= z \\ (1-x) &= \frac{z}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\bullet x = 1 - z/\lambda$$

και προσδιορίζουμε ο μετασχηματισμός Laplace.

Που μπορεί να μας βοηθήσει?

Έστω ότι θέλω να βρω

$$EW = \int_0^{+\infty} t w(t) dt$$

Τότε παρατηρώ ότι:

$$W^*(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} w(t) dt$$

παιρνω παράγωγο

$$\frac{dW^*(z)}{dz} = - \int_0^{+\infty} t e^{-zt} w(t) dt = -EW$$

Άρα

$$EW = - \left. \frac{dW^*(z)}{dz} \right|_{z=0}$$

Όμως ισχύει και ότι:

$$\Pi(x) = W^*(\lambda - \lambda x)$$

(Αν $w^*(z)$ συμπίπτει με το μετασχηματισμό Laplace γνωστής κατανομής, τότε έχω προσδιορίσει την w)

(Αν δεν συμπίπτει θα πρέπει να αντιστρέψω το μετασχηματισμό Laplace.)

(Αν δεν μπορώ να το κάνω πως θα αξιολογήσω το ου βρήκα $w^*(z)$?)

Επομένως

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \frac{dw^*(\lambda - \lambda x)}{dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\Pi(x)}{dx} = (-\lambda) \frac{dw^*(x)}{dx}}$$

Επομένως για $x=0$ $\frac{d\Pi(x)}{dx} \Big|_{x=0} = -\lambda \frac{dw^*(x)}{dx} \Big|_{x=0} \Rightarrow \frac{d}{dx} \Pi(x) \Big|_{x=0} = -\lambda(-Ew) \Rightarrow$

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} \Big|_{x=0} = \lambda Ew.$$

Καθώς $Ew = - \frac{dw^*(x)}{dx} \Big|_{x=0}$

Όμως $\Pi(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \pi_i x^i$ (πιθανογεννήτρια για γεννα τις πιθανότητες)

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} = \sum_{i=0}^{+\infty} i \pi_i x^{i-1}$$

$$\frac{d\Pi(x)}{dx} \Big|_{x=1} = \sum_{i=0}^{+\infty} i \pi_i \quad \left(\begin{array}{l} \text{αναμενόμενη τιμή των} \\ \text{αριθμών των πελατών στο σύστημα} \end{array} \right)$$

Δηλαδή

$$E \left(\begin{array}{l} \text{αριθμός} \\ \text{πελατών} \end{array} \right) = \lambda E \left(\begin{array}{l} \text{χρόνος} \\ \text{αναμονής} \end{array} \right)$$

Εφαρμογές - ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ

• M/M/1/∞

$$b(t) = \mu \cdot e^{-\mu t}$$

$$b^*(x) = \frac{\mu}{\mu+x}$$

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$b^*(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \mu e^{-\mu t} dt$$

Είναι τότε: $W^*(x) = \frac{(1-\rho)x b^*(x)}{\lambda b^*(x) + x - \lambda} \Rightarrow$

$$W^*(x) = \frac{(1-\rho)x \frac{\mu}{\mu+x}}{\lambda \frac{\mu}{\mu+x} + x - \lambda} \Rightarrow$$

$$W^*(x) = \frac{(1-\rho)x\mu}{(\mu+\lambda)x - \lambda(\mu+x) + \lambda\mu}$$

ξόπου

$\rho = \text{πυκνότητα κυκλοφορίας}$
 $= \frac{\lambda}{\mu}$ στο M/M/1/∞

$$W^*(x) = \frac{(1-\rho)x\mu}{x^2 + \mu x - \lambda\mu - \lambda x + \lambda\mu} \Rightarrow$$

$$W^*(x) = \frac{(1-\rho)x\mu}{x^2 + (\mu - \lambda)x} \Rightarrow$$

$$W^*(x) = \frac{x\mu(1-\rho)}{x(x+\mu-\lambda)} \Rightarrow W^*(x) = \frac{\mu(1-\lambda/\mu)}{x+\mu-\lambda} \Rightarrow W^*(z) = \frac{\mu-\lambda}{x+\mu-\lambda}$$

} Θεία πράξεων.

Επομένως $w(t)$ είναι Έκθετική με $\mu - \lambda$..

5) Ο χώρος στάθμευσης των επισκεπτών σε ένα ίδρυμα.
περιορίζεται σε 5 μόνο θέσεις. Τα αυτοκίνητα που
κάνουν χρήση αυτού του χώρου φθάνουν σύμφωνα με
κατανομή Poisson με ρυθμό 6 αυτοκ. την ώρα.

Ο χρόνος παραμονής στο χώρο στάθμευσης είναι
εκθετικός με μέση τιμή 30 λεπτά.

Οι επισκέπτες που δεν βρίσκουν καλή θέση περιμένουν
σ' ένα χώρο αναμονής 3 θέσεων και αν και αυτός
είναι γεμάτος φεύγουν.

Προσδιορίστε:

- (α) Πιθανότητα να $\exists$ η αυτοκίνητα στο σύστημα
 $P_n = ?$
- (β) Ο ενεργός ρυθμός άφιξης των αυτοκινήτων που χρησιμοποιούν
πραγματικά το χώρο στάθμευσης.
- (γ) Το μέσο αριθμό αυτοκινήτων στο χώρο στάθμευσης
- (δ) Το μέσο χρονικό διάστημα που ένα αυτοκίνητο περιμένει
για να βρει να σταθμεύσει.

ΛΥΣΗ

Έχουμε M/M/m/k σύστημα με $m=5$ και $k=5+3=8$
M/M/5/8 εσω FIFO.

Αφίξεις Poisson $\lambda = 6$ /ώρα

Εξυπηρέτηση $\mu = \frac{60}{30} = 2$ /ώρα

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{6}{5 \cdot 2} = \frac{3}{5} < 1 \quad \text{Σ.Ι}$$

$$(a) P_n = \begin{cases} \frac{\tau^n}{n!} P_0 & n < 5 = m \\ \frac{\tau^n}{m! m^{n-m}} P_0 & m \leq n \leq k=8 \end{cases}$$

$$\mu \tau = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{2} = 3.$$

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} \frac{1-\rho^{k-m+1}}{1-\rho} \right]^{-1}$$

← δείχνει απόδειξη

$$\text{βάζω } k=8 \quad m=5 \quad \tau=3 \quad \rho=\frac{3}{5}$$

$$(b) \lambda \cdot [P_0 + P_1 + P_2 + \dots + P_7] \stackrel{\sum_{i=0}^8 P_i = 1}{=} \lambda(1 - P_8)$$

$$(c) L = \sum_{n=0}^k n P_n$$

(d) χρόνος αναμονής στην ουρά. $E W_q = ?$

ΜΕΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΠΕΜΑΤΩΝ ΣΤΗΝ ΟΥΡΑ = ΜΕΣΟΣ ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΦΙΞΕΩΝ (ΕΝΕΡΧΟΙΣ) · ΜΕΣΟ ΧΡΟΝΟ ΑΝΑΜΟΝΗΣ ΣΤΗΝ ΟΥΡΑ.

από ερώτημα (β)

$$L_q = \lambda \cdot (1 - P_8) \cdot E W_q \Rightarrow E W_q = \frac{L_q}{\lambda(1 - P_8)}$$

$$\text{όπου } L_q = 0 \cdot (P_0 + P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5) + 1 P_6 + 2 P_7 + 3 P_8$$

$$\text{ή από θεωρία } L_q = m^m / m! \sum_{n=m+1}^k (n-m) \rho^n.$$

⑥ Μια κοινότητα εξυπηρετείται από 2 εταιρείες ταξί.
 Η κάθε εταιρεία έχει δύο ταξί και αμφότερες οι εταιρείες
 κατέχουν το μισό μερίδιο αγοράς, με τις κλήσεις να φτάνουν
 στο γραφείο διεκπεραίωσης της κάθε εταιρείας με μέσο ρυθμό
8 τηλεφωνήματα την ώρα. Ο μέσος χρόνος διαδρομής είναι 12 λεπτά.

Οι κλήσεις φτάνουν σύμφωνα με Poisson και ο χρόνος διαδρομής
 είναι εκθετικός. Οι δύο εταιρείες έχουν αγοράσει από έναν
 επενδυτή και θα συγχωνευθούν σε ένα απλό γραφείο
 διεκπεραίωσης. Να αναλύσετε την πρόταση του νέου ιδιοκτήτη.

ΛΥΣΗ

Το ΑΡΧΙΚΟ σύστημα είναι το καθεμία ένα $M/M/2/\infty$ σύστημα
 με αφίξεις Poisson $\lambda=8$

$$\text{Εξυπηρ. Ευθετική } \mu=5 \quad \left\{ \mu = \frac{60}{12} = 5 \right\}$$

Γενικά για το $M/M/m/\infty$ σύστημα:

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{8}{2 \cdot 5} = \frac{4}{5} < 1$$

$$P_0 = \left[\sum_{i=0}^{m-1} \frac{\tau^i}{i!} + \frac{\tau^m}{m!} \frac{1}{1-\rho} \right]^{-1}, \quad \mu \tau = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P_n = \begin{cases} \frac{\tau^n}{n!} P_0, & n < m \\ \frac{\tau^n}{m! \cdot m^{n-m}} P_0, & n \geq m \end{cases}$$

$$L_q = \frac{\tau^{m+1}}{m m! (1-\rho)^2} \rho_0$$

$$EW_q = \frac{L_q}{\lambda} = \rho_0 \frac{\tau^{m+1}}{\lambda m m! (1-\rho)^2}$$

$$Ew = \frac{1}{\mu} + EW_q = \frac{1}{\mu} + \rho_0 \frac{\tau^{m+1}}{\lambda m m! (1-\rho)^2}$$

$$L = \lambda \cdot Ew = \frac{\lambda}{\mu} + \rho_0 \frac{\tau^{m+1}}{m m! (1-\rho)^2}$$

Μετά εφόσον έχουμε συγχώνευση.

MIM/4/∞ σύστημα

με $\lambda = 16$ και $\mu = 5$

$$\rho = \frac{\lambda}{m \cdot \mu} = \frac{16}{4 \cdot 5} = \frac{16}{20} < 1 \quad \boxed{\Sigma. I}$$

Παω και Καω την ίδια διαδικασία

$$\text{με } m=4 \quad \rho = \frac{16}{20}, \quad \lambda=16, \quad \mu=5$$

7) Ένα κέντρο εξυπηρέτησης έχει 2 θέσεις εξυπηρέτησης και χώρο αναμονής που χωράει 2 πελάτες.
Οι πελάτες φτάνουν σύμφωνα με κατανομή Poisson με ρυθμό 12 πελάτες την ώρα.

Όταν ο χώρος αναμονής είναι γεμάτος οι πελάτες φεύγουν

Ο χρόνος εξυπηρέτησης ενός πελάτη ακολουθεί εκθετική με μέσο 5 λεπτά. Τα έσοδα του σταθμού από κάθε

πελάτη που εξυπηρετείται είναι 23€.

Το κόστος λειτουργίας κάθε θέσης εξυπηρέτησης όταν αυτή εξυπηρετεί είναι 92€ ανά ώρα.

Ενώ το κόστος του σταθμού από την αναμονή των πελατών είναι 460€ ανά ώρα αναμονής για κάθε πελάτη που περιμένει.

Ποιό είναι το κέρδος του σταθμού ανά ώρα;

ΛΥΣΗ

Έχουμε M/M/m/k σύστημα με $m=2$ και $k=2+2=4$.

αφίξεις: Poisson $\lambda=12$

Εξυπηρέτηση Εκθετική $\mu=\frac{60}{5}=12$

οπότε M/M/2/4 με $\lambda=12$
 $\mu=12$

ΚΕΡΔΟΣ = ΕΣΟΔΑ - ΕΞΟΔΑ.

Κόστος λειτουργίας όταν εξυπηρετεί:

Είναι $1 \cdot 92$, $2 \cdot 92$ (διότι 2 θέσεις εξυπηρέτησης)
 $92 \cdot P_1 + 92 \cdot (P_2 + P_3 + P_4)$

Δυνατές τιμές του κόστους λειτουργίας όταν εξυπηρετεί: 92, 184.

με πιθανότητες $P(\text{κόστος } 92) = P_1$

$P(\text{κόστος } 184) = P(\text{είτε 2 πελ στο σύστημα είτε 3, είτε 4}) = P_2 + P_3 + P_4$ 14

θέσεις αναμονής

Άρα κόστος λειτουργίας (αναμενόμενο)

$$92 \cdot P_1 + 184 (P_2 + P_3 + P_4)$$

Κόστος από αναμονή

Δυνατές τιμές. $1 \cdot 460$, $2 \cdot 460$ δηλ 460 όταν αναμένει 1 πελάτη
 920 —//— 2 πελάτες

Άρα κόστος αναμονής (αναμενόμενο)

$$460 \cdot P_3 + 920 P_4$$

Έσοδα πιθανότητα να μην είναι χεμάτο

$$23 \cdot (1 - P_4) \cdot \lambda$$

↑
ρυθμός αφίξεων
Ενεργός ρυθμός αφίξεων